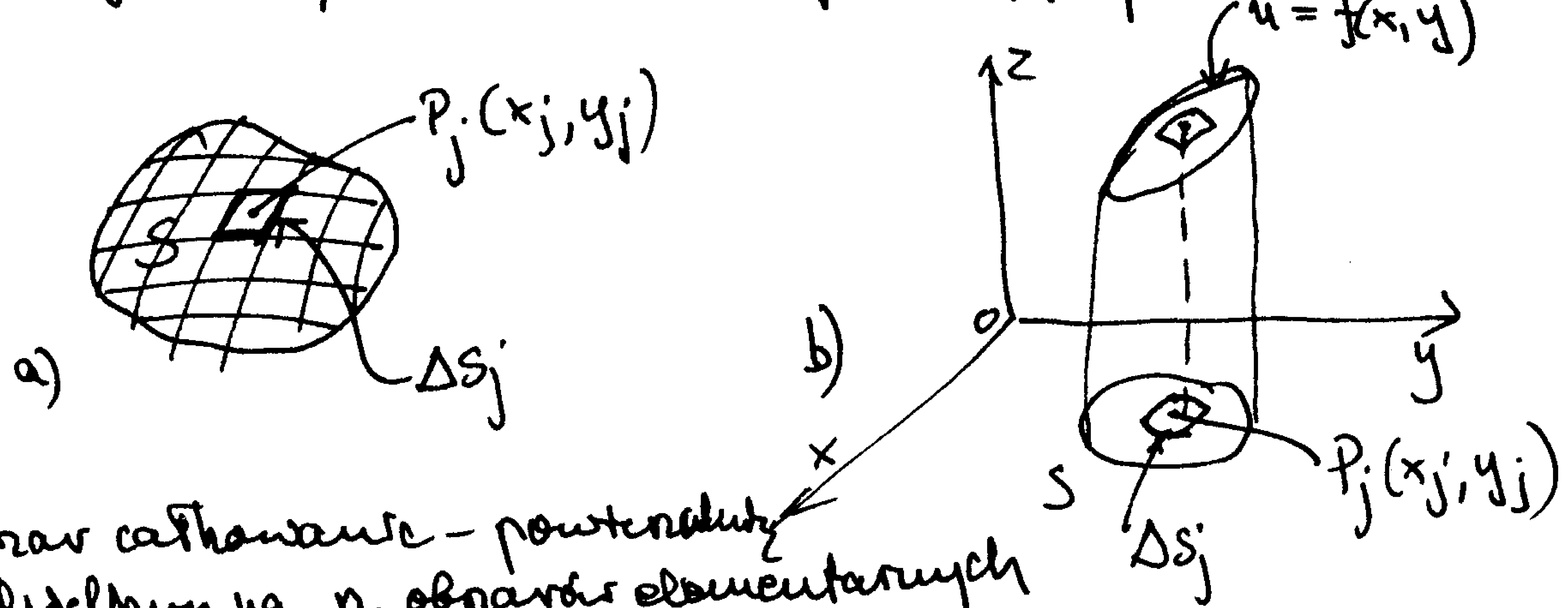
Całka podwójna

Definicja

Całką podwójną funkcji dwóch zmiennych $u = f(x,y)$ po płaskiej powierzchni S nazywamy wyrażenie postaci:

$$\int_S f(x,y)\,dS = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

Wartość powyższej całki obliczamy następująco: (rys.)



1. Obszar całkowania – powierzchnię S dzielimy na n obszarów elementarnych
2. Wewnątrz (bądź na brzegu) każdego obszaru elementarnego wybieramy dowolny punkt $P_i(x_i,y_i)$
3. Wartość funkcji w wybranym punkcie $u = f(x_i,y_i)$ mnożymy przez pole obszaru elementarnego.
4. Otrzymane w ten sposób iloczyny $f(x_i,y_i)\cdot\Delta S_i$ sumujemy; czyli obliczamy $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$
5. Wyznaczamy granicę $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$

Jeśli granica ta istnieje i nie zależy ani od sposobu podziału powierzchni S na obszary elementarne, ani od wyboru punktów $P_i(x_i,y_i)$, to nazywamy ją całką podwójną funkcji $u = f(x,y)$ po powierzchni (obszarze) S i piszemy

$$\int_S f(x,y)\,dS = \lim_{\substack{\Delta S_i\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \qquad (*)$$

Twierdzenie (o istnieniu)

Całka podwójna (*) istnieje, jeśli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w całym obszarze całkowania, łącznie z jego brzegiem.

Interpretacja geometryczna

Pojęcie całki podwójnej ma ścisły związek z obliczaniem pól powierzchni figur płaskich. Podstawiamy wówczas $f(x,y) \equiv 1$.

Za pomocą całki podwójnej można jednak obliczyć również objętość bryły cylindrycznej o podstawie S leżącej w płaszczyźnie xy (rys b) o tworzącej równoległej do osi z i ograniczonej z góry przez powierzchnię o równaniu $u = f(x,y)$.

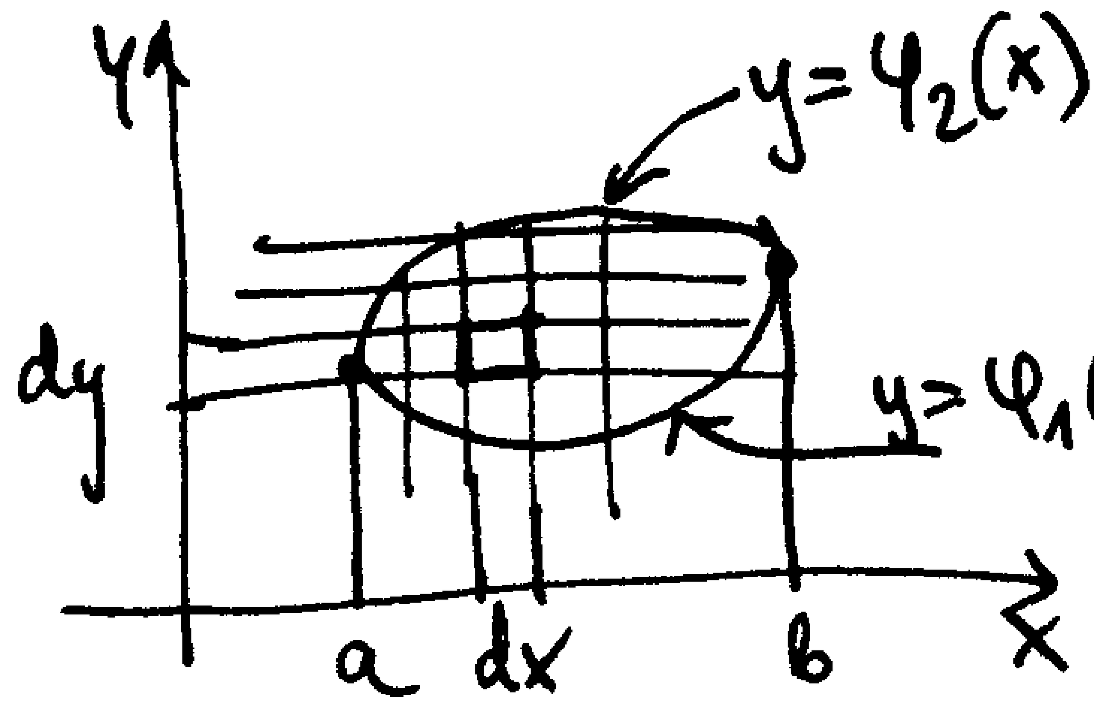
Każdy składnik sumy $(*)$ $f(x_i;y_i)\Delta S_i$ odpowiada objętości kolumny o podstawie ΔS_i i wysokości $f(x_i;y_i)$.

Obliczanie całek podwójnych

Obliczenie całki podwójnej daje się na ogół sprowadzić do dwóch prostych całkowań jednowymiarowych, których postać zależy od wyboru konkretnego układu współrzędnych.

Całkowanie we współrzędnych kartezjańskich.

Obszar całkowania dzielimy za pomocą linii równoległych do osi układu na obszary elementarne (rys). Następnie sumujemy wszystkie wartości $f(x,y)dS$



Analogicznie zapiszemy to następująco:

$$\int_S f(x,y)\,dS = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx =$$

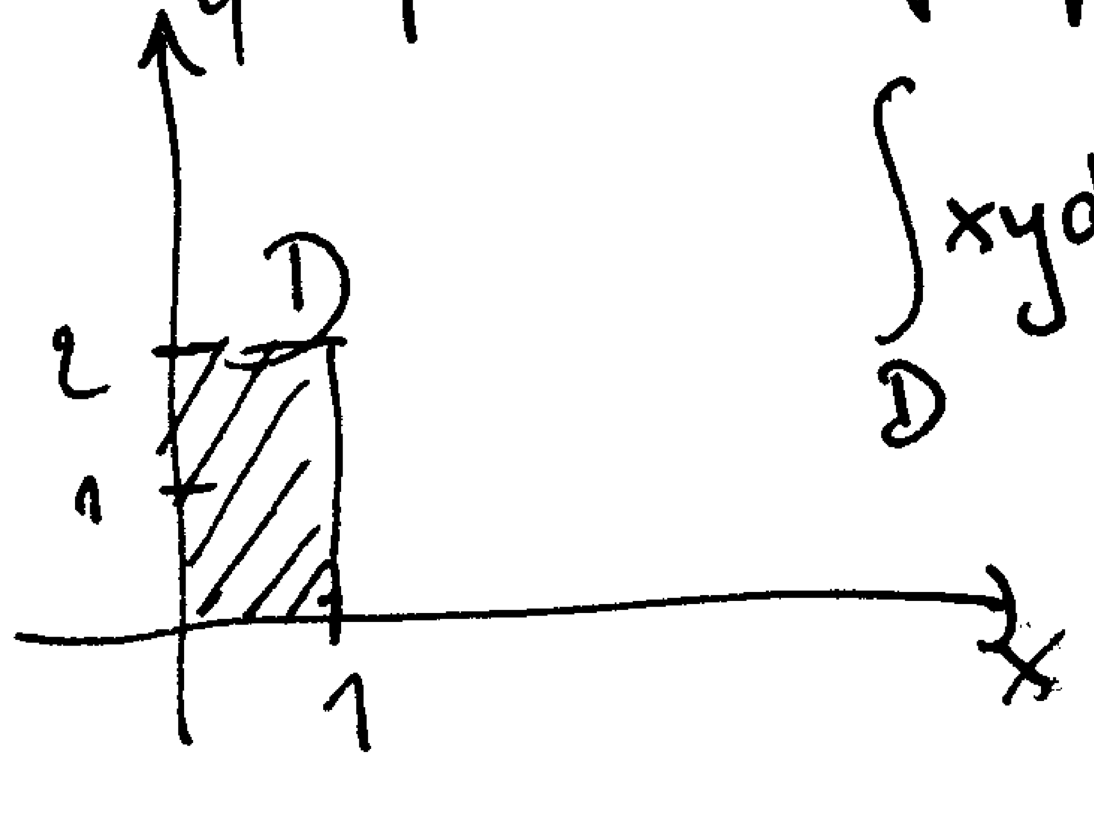
$$= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$y=\varphi_1(x)$ oraz $y=\varphi_2(x)$ są równaniami górnego i dolnego brzegu obszaru całkowania.

Przy obliczaniu pierwszej całki [w nawiasie kwadratowym] wielkość x traktujemy jako parametr.

Przykład 1

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $z = xy$ po obszarze D określonym następująco $D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1 \ i \ 0 \le y \le 2\}$



$$\int_D xy\,dS = \int_0^1\int_0^2 xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^2 xy\,dy\right] dx = \int_0^1 2x\,dx =$$

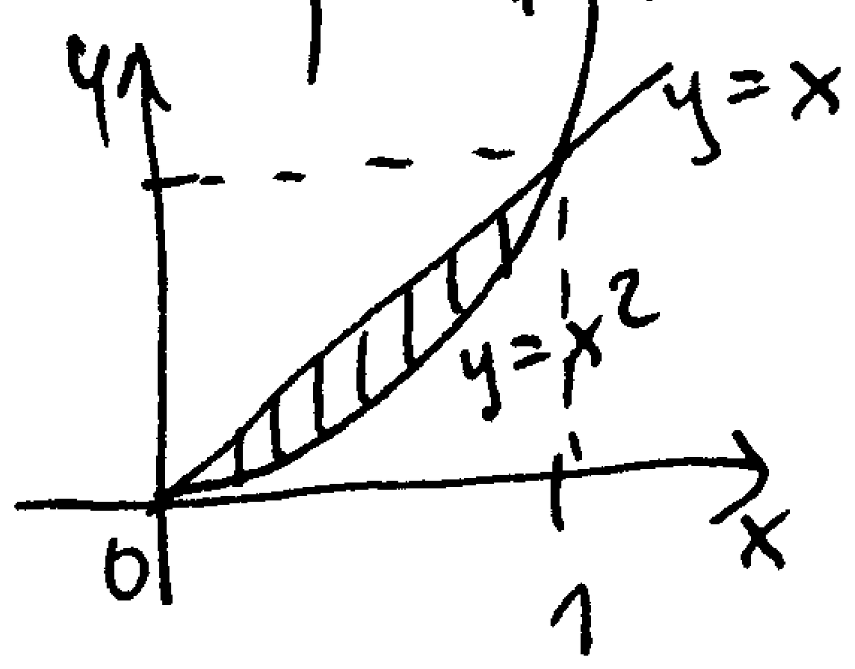
$$= 2\int_0^1 x\,dx = 2\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{0}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

□

Przykład 2

Obliczyć całkę z funkcji $z = xy$ po obszarze zawartym między krzywymi $y = x$ oraz $y = x^2$.

Mamy $\varphi_1(x) = x^2$ i $\varphi_2(x) = x$ jak również $0 \le x \le 1$ (rys)



$$D = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1 \text{ i } x^2 \le y \le x\}$$

$$\iint_D xy\,dS = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} xy\,dy\right] dx = *$$

Obliczamy całkę z nawiasu kwadratowego traktując x jako parametr. Mamy

$$\int_{x^2}^{x} xy\,dy = x \int_{x^2}^{x} y\,dy = x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right) = \frac{1}{2}(x^3 - x^5)$$

$$* = \int_0^1 \frac{1}{2}(x^3 - x^5)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x^3 dx - \int_0^1 x^5 dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{x^6}{6}\Big|_0^1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-2}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \quad \square$$

Przykład 3

Obliczyć całkę podwójną z funkcji $z = x + y$ po obszarze D zdefiniowanym tak samo jak w przykładzie 2.

$$\iint_D (x+y)\,dS = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{4}\right) dx$$

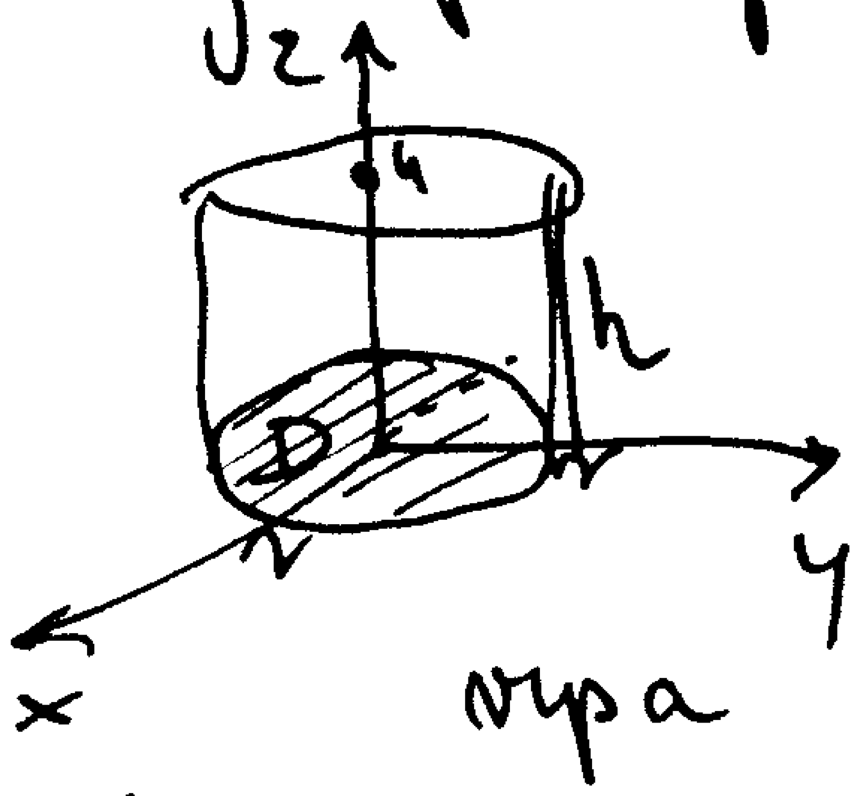
$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{20}$$

Obliczenie całki: $\displaystyle\int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy = \int_{x^2}^{x} x\,dy + \int_{x^2}^{x} y\,dy = xy\Big|_{x^2}^{x} + \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} =$

$$= x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} = \underline{x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{4}}$$

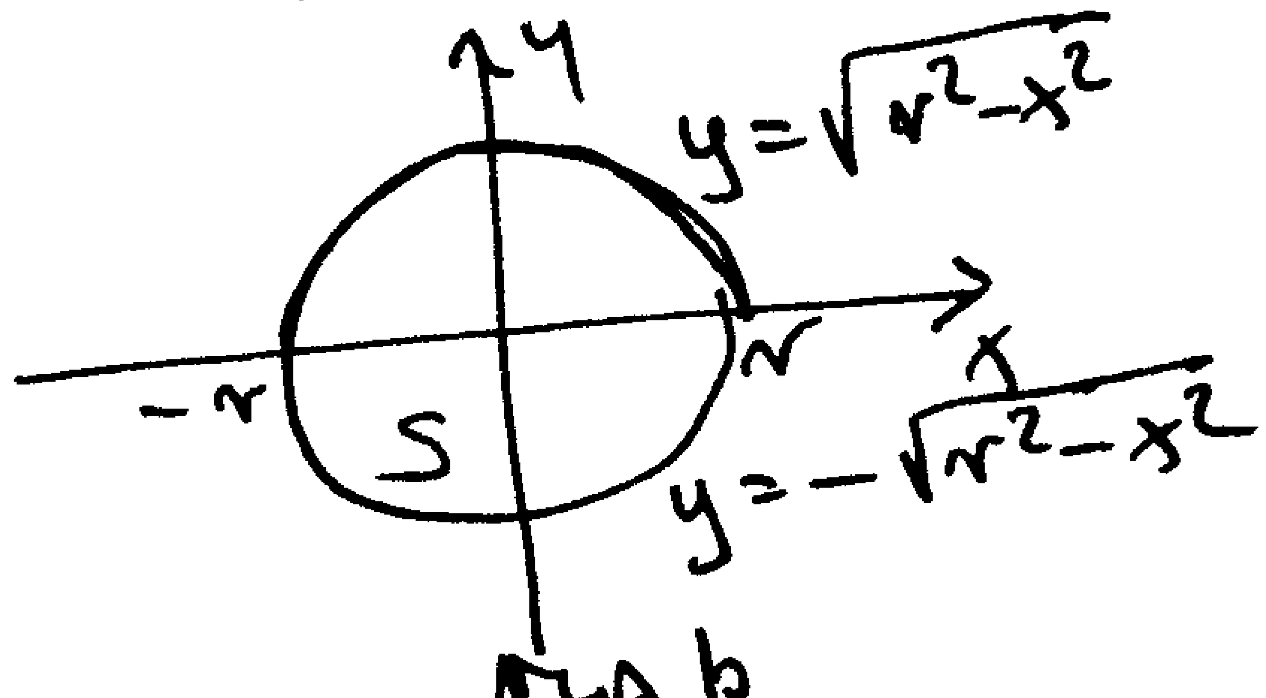
Przykład 4

Wyprowadzić wzór na objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h, stosując całkowanie podwójne odpowiedniej funkcji po odpowiednim obszarze.



rys a

$$V = \iint_D h\,dS$$



rys b.

$$D = \{(x,y);\ -r \le x \le r \text{ i } -\sqrt{r^2-x^2} < y \le \sqrt{r^2+x^2}\}$$

$$V = \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h\,dy\,dx = *$$

Obliczamy całkę $\displaystyle\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h\,dy = hy\Big|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} = h\left(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right) =$

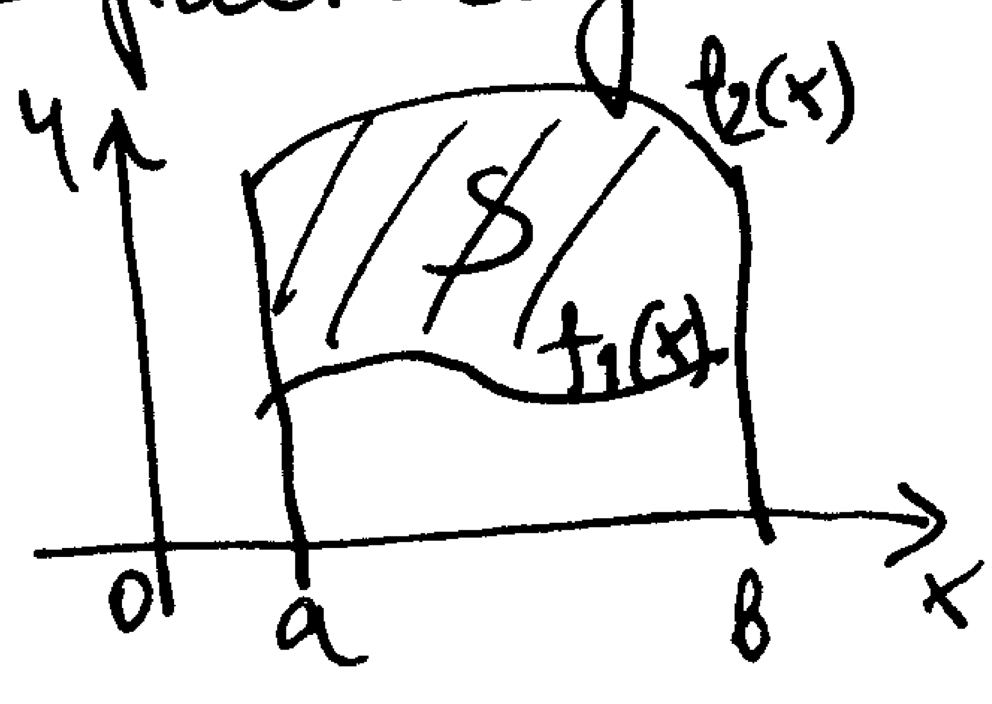
$= 2h\sqrt{r^2-x^2}$

$$* \int_{-r}^{r} 2h\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2h\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

ta całka z uwzględnieniem czynnika 2 ma wartość równą polu obszaru na rys b czyli polu koła o promieniu r czyli πr^2.

więc ostatecznie $V = h\cdot\left(2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx\right) = h\cdot\pi r^2$

Jest to wzór na objętość walca o promieniu podstawy r i wysokości h.



Obliczenie pola powierzchni z rysunku można osiągnąć na dwa sposoby:

a) $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$

b) $S = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\,dx$ (tu funkcja $f(x,y)=1$)